Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

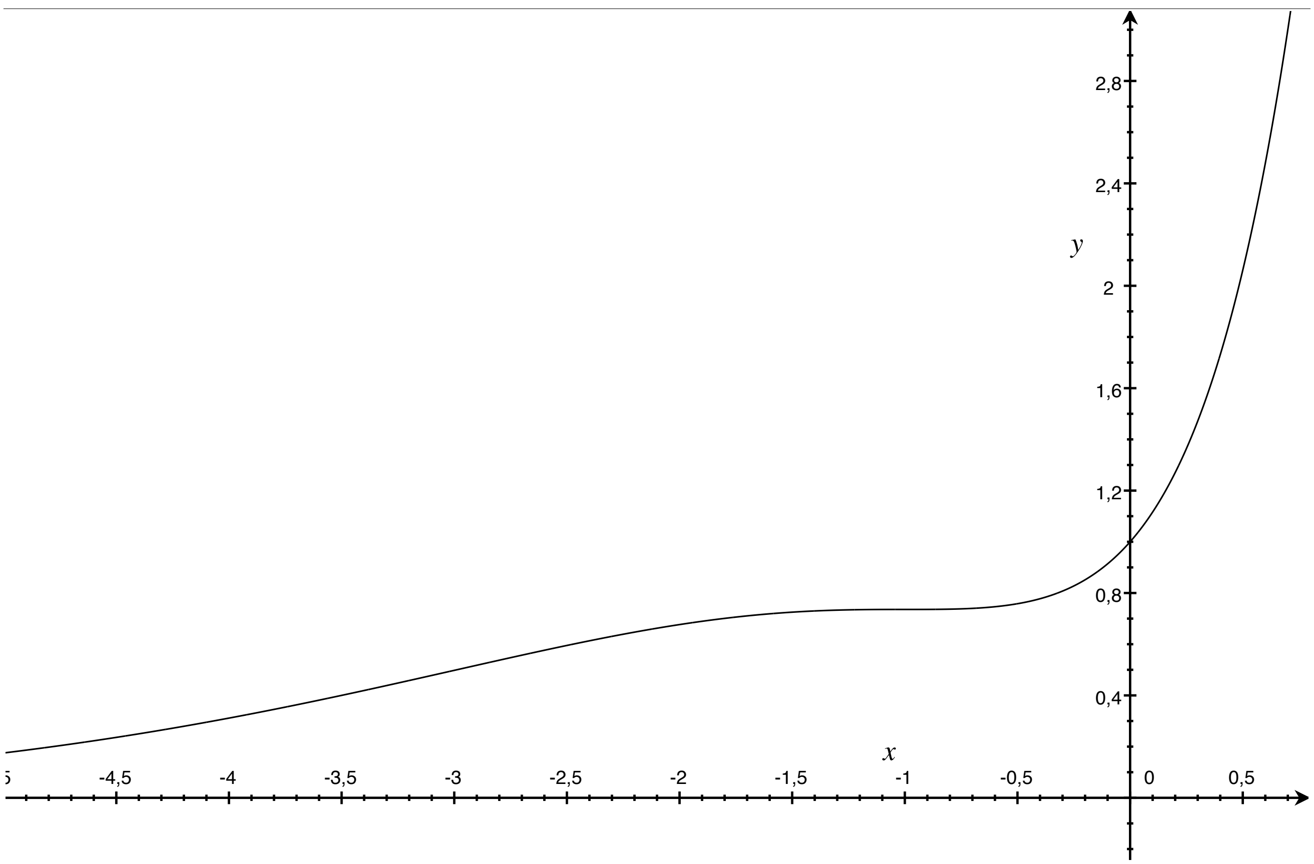
Pisa, 12 gennaio 2026

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

determinandone la continuità, la derivabilità, gli eventuali punti di massimo o minimo assoluti e relativi, estremi inferiore e superiore, gli eventuali asintoti, intervalli di convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione



Esercizio 2 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{x^{5-\alpha}(1-x)^{2\alpha}}{\sin x}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $(0, 1)$.

Soluzione

Osserviamo che la f è continua e positiva in tutto l'intervallo di integrazione ma potrebbe non essere limitata negli intorni degli estremi dell'intervallo per alcuni valori di α. Infatti, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^{5-\alpha}}{\sin x} \sim \frac{x^{5-\alpha}}{x} = \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico, è integrabile se e solo se $\alpha - 4 < 1$ quindi $\alpha < 5$. Per $x \to 1^-$ invece

$$f(x) \sim (1-x)^{2\alpha} = \frac{1}{(1-x)^{-2\alpha}}$$

che è integrabile se e solo se $-2\alpha < 1$ quindi $\alpha > -\dfrac{1}{2}$. In definitiva la f è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$ se e solo se $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 5$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}}{\sqrt{n}}.$$

Soluzione

Osserviamo che la serie è a termini positivi essendo $\sqrt{1 - \dfrac{4}{n^2}} \leq 1 \; \forall n \geq 2$. Inoltre:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}}{\sqrt{n}} = \frac{1 - (1 - \frac{4}{n^2})}{\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\, n^2} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

la serie quindi converge per il criterio del confronto asintotico essendo $\dfrac{5}{2} > 1$.